Analisi lineare - procedimento risolutivo degli esercizi

Sforzo normale o assiale

- compressione semplice:
  - premessa: equilibrio alla traslazione:
    $$N = \sigma_c'(A_c' + n A_s')$$
  - si calcola l'area della sezione ideale equivalente:
    $$A_i = A_c' + n A_s'$$
  - si calcolano le tensioni e si verifica che siano inferiori a quelle ammissibili;
    $$\sigma_c' = \frac{N}{A_i} \qquad \sigma_s' = n\sigma_c'$$
- trazione semplice:
  - premessa: equilibrio alla traslazione (reagisce solo l'acciaio perché il calcestruzzo non resiste a trazione):
    $$N = \sigma_s \cdot A_s$$
  - si calcola la tensione e si verifica che sia inferiore a quella ammissibile:
    $$\sigma_s = N/A_s$$
- instabilità dell'equilibrio:
  - si calcola il momento d'inerzia della sezione ideale equivalente e si ricavano raggio d'inerzia e snellezza (momento e raggio minimi):
    $$J_{i\,min} \Rightarrow \rho_{i\,min} = \sqrt{\frac{J_{i\,min}}{A_i}} \Rightarrow \lambda = \frac{\beta \cdot l}{\rho_{i\,min}} = \frac{l_0}{\rho_{i\,min}}$$
  - nota la snellezza λ si ricava dalla tabella il corrispondente ω;
    $$\lambda \Rightarrow \omega$$
  - si amplificano le tensioni con ω e si verifica che siano inferiori a quelle ammissibili:
    $$\sigma_c' = \frac{\omega N}{A_i} \qquad \sigma_s' = n\sigma_c'$$
  - lo stesso procedimento si usa per pressione eccentrica, ma il coefficiente di amplificazione non è più ω funzione di λ. Si usa un coefficiente c definito come segue;
    $$c = \frac{1}{1 - N/N_E} \qquad N_E = \frac{\pi^2 \cdot E_c \cdot A_i}{\lambda^2}$$

Se M non è costante lungo il pilastro si calcola, detti M_a e M_b i valori di estremità:

$$M = \sqrt{0{,}3\,(M_a^2 + M_b^2) + 0{,}4\, M_a \cdot M_b}$$

Flessione retta:

- premesse: equilibri alla traslazione e alla rotazione intorno all'asse neutro:

$$-\int_{A_c'} \sigma_c(y)\, da_c' - \sigma_s' A_s' + \sigma_s A_s = 0$$

$$\Rightarrow S_{mo} = \int_{A_c'} y\, da_c' + m A_s' y_s' - m A_s y_s = 0$$

$$\int_{A_c'} \sigma_c(y)\, y\, da_c' + \sigma_s' A_s' y_s' + \sigma_s A_s y_s = M$$

$$\Rightarrow J_{mi} = \int_{A_c'} y^2\, da_c' + m A_s' y_s'^2 + m A_s y_s^2$$

si ottengono le equazioni di Navier:

$$\sigma_c' = \frac{M y_m}{J_{mi}} \qquad \sigma_c = \frac{M y}{J_{mi}} \qquad \sigma_s' = \frac{m M (y_m - d')}{J_{mi}} \qquad \sigma_s = \frac{m M (d - y_m)}{J_{mi}}$$

- si calcola la posizione dell'asse neutro usando l'equazione di equilibrio alla traslazione:
  - per sezione rettangolare:

$$b\, y_m^2 + 2m\,(A_s' + A_s)\, y_m - 2m\,(A_s' d' + A_s d) = 0$$

  - per sezione a T con asse neutro che taglia l'anima e porzione di calcestruzzo compressa a forma di T:

$$b_0 \frac{y_m^2}{2} + (b - b_0)\left[\frac{y_m^2}{2} - \frac{(y_m - S)^2}{2}\right] + m A_s' (y_m - d') - m A_s (d - y_m) = 0$$

Si ottiene in entrambi i casi y_m;

- si calcola il momento d'inerzia rispetto all'asse neutro:
  - per sezione rettangolare:

$$J_{mi} = b \frac{y_m^3}{3} + m A_s' (y_m - d')^2 + m A_s (d - y_m)^2$$

  - per sezione a T con asse neutro che taglia l'anima e porzione di calcestruzzo compressa a forma di T:

$$J_{mi} = b_0 \frac{y_m^3}{3} + (b - b_0)\left[\frac{y_m^3}{3} - \frac{(y_m - S)^3}{3}\right] + m A_s' (y_m - d')^2 + m A_s (d - y_m)^2$$

- si calcolano le tensioni e si verifica che siano inferiori a quelle ammissibili:

$$\sigma_c = \frac{M y_m}{J_{mi}} \qquad \sigma_s' = \frac{m M (y_m - d')}{J_{mi}} \qquad \sigma_s = \frac{m M (d - y_m)}{J_{mi}}$$

Flessione deviata: la risoluzione di questo problema è talmente complessa da richiedere l'uso (quasi indispensabile) del calcolatore. L'asse neutro è infatti deviato rispetto agli assi principali ε possibile scomporre il momento M in M_x e M_y, ma non si può usare la sovrapposizione degli effetti poiché il cemento armato lavora in regime non lineare.

Sforzo normale eccentrico:

- presso-flessione retta (flessione intorno a x):
  - premessa: si suppone che la sezione sia integralmente reagente, cioè non parzializzata;
  - si calcola il baricentro G_i della sezione ideale equivalente (con un asse ausiliario x' al lembo superiore):

$$A_i = A_c + n(A_s' + A_s) \qquad S_{x'i} = \int_{A_c'} y' \, da_c' + n(A_s' d' + A_s d)$$

$$\Rightarrow y_{G_i}' = \frac{S_{x'i}}{A_i}$$

  - introdotto un asse x passante per G_i si cercano gli estremi superiore e inferiore del raggio centrale d'inerzia della sezione ideale equivalente:

$$J_i = \int_{A_c} y^2 \, da_c' + n(A_s' y_s'^2 + A_s y_s^2), \quad y_s = d - y_{G_i}' \text{ e } y_s' = y_{G_i}' - d'$$

$$\Rightarrow \rho_i^2 = \frac{J_i}{A_i} \quad \Rightarrow \beta' = \frac{\rho_i^2}{y'}, \quad \beta'' = \frac{\rho_i^2}{y''}$$

  - se il centro di sollecitazione è interno al nocciolo l'ipotesi iniziale era corretta e si è in un caso di piccola eccentricità. Si usa allora la formula di Navier per le sezioni presso-inflesse omogenee:

$$\sigma_c' = \frac{N}{A_i} + \frac{N e_0 (y_s' + d')}{J_i} \qquad \sigma_s' = \frac{nN}{A_i} + \frac{n N e_0 y_s'}{J_i}$$

$$\sigma_s = \frac{nN}{A_i} - \frac{n N e_0 y_s}{J_i}$$

Quindi si esegue la verifica con le tensioni ammissibili;

  - se invece il centro di sollecitazione è esterno al nocciolo l'ipotesi iniziale era errata e si è in un caso di **grande** eccentricità. Bisogna trovare la posizione dell'asse neutro imponendo gli equilibri alla traslazione e alla rotazione rispetto all'asse neutro stesso:

traslazione: $-\int_{A_c} \sigma_c(y) \, da_c - \sigma_s' A_s' + \sigma_s A_s = -N$

$$\sigma_c(y) = \sigma_c' \frac{y}{y_n}, \quad \sigma_s' = n\sigma_c' \frac{y_s'}{y_n}, \quad \sigma_s = n\sigma_c' \frac{y_s}{y_n}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_c'}{y_n}\left[\int_{A_c} y \, da_c + n y_s' A_s' - n y_s A_s\right] = N \Rightarrow \frac{\sigma_c' S_{ni}}{y_n} = N$$

rotazione: $\int_{A_c} \sigma_c(y)\, y\, da_c' + \sigma_s' A_s' y_s' + \sigma_s A_s y_s = N y_c$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_c'}{y_n}\left[\int_{A_c'} y^2\, da_c' + n A_s' y_s'^2 + n A_s y_s^2\right] = N y_c \Rightarrow \frac{\sigma_c' J_{n'}}{y_n} = N y_c$$

Dividiamo la seconda equazione per la prima:

$$y_c = \frac{J_{n'}}{S_{n'}} \Rightarrow J_{n'} - (y_n + u) S_{n'} = 0$$

Si ottiene un'equazione di 3° grado da risolvere iterativamente per ricavare l'asse neutro y_n. Nel caso di sezione rettangolare l'equazione è:

$$\frac{b}{6} y_n^3 + \frac{bu}{6} y_n^2 + n\left[A_s(d+u) + A_s'(d'+u)\right] y_n - n\left[A_s d(d+u) + A_s' d'(d'+u)\right] = 0$$

Una volta noto y_n si determinano le tensioni che devono essere inferiori ai valori ammissibili:

$$\sigma_c' = \frac{N y_n}{S_{n'}} \qquad \sigma_s' = \frac{n N (y_n - d')}{S_{n'}} \qquad \sigma_s = \frac{n N (d - y_n)}{S_{n'}}$$

- tenso-flessione retta (flessione intorno a x):

- premessa: si suppone che la sezione sia integralmente reagente, cioè non parzializzata;
- reagirà solo l'acciaio, trovandoci nel caso di trazione. Cerchiamo il baricentro (con asse ausiliario x' al lembo superiore):

$$A_{STOT} = A_s + A_s' \qquad S_{x's} = A_s d + A_s' d' \Rightarrow y_{Gs}' = \frac{S_{x's}}{A_s}$$

- si determina il nocciolo centrale d'inerzia σ, o meglio, i suoi estremi lungo y (introducendo l'asse x passante per G_s):

$$J_s = A_s (d - y_{Gs}')^2 + A_s'(y_{Gs}' - d')^2 \Rightarrow \rho_s^2 = \frac{J_s}{A_s}$$

$$\Rightarrow \beta' = \frac{\rho_s^2}{y'} = \frac{\rho_s^2}{y_s}, \quad \beta'' = \frac{\rho_s^2}{y''} = \frac{\rho_s^2}{y_s'}$$

- se il centro di sollecitazione è interno al nocciolo l'ipotesi iniziale era corretta e si è in un caso di piccola eccentricità. Si usa la formula di Navier per le sezioni tenso-inflesse omogenee in campo elastico lineare:

$$\sigma_s' = \frac{N}{A_{STOT}} - \frac{N \cdot e_s y_s'}{J_s} \qquad \sigma_s = \frac{N}{A_{STOT}} + \frac{N e_s y_s}{J_s}$$

Quindi si esegue la verifica con le tensioni ammissibili;
- se invece il centro di sollecitazione è esterno al nocciolo l'ipotesi iniziale era errata e si è in un caso di grande eccentricità. La soluzione è identica a quella di presso-flessione retta in grande eccentricità;

- presso-flessione deviata e tenso-flessione deviata:
  - premessa: ipotesi di sezione non parzializzata;
  - se il centro di sollecitazione cade internamente al nocciolo si è in un caso di piccola eccentricità. Lo stato di tensione si calcola usando le formule classiche delle sezioni omogenee (l'acciaio viene omogeneizzato a calcestruzzo) in campo elastico lineare;
  - se il centro di sollecitazione cade esternamente al nocciolo si è in un caso di grande eccentricità. Trattandosi di flessione deviata è necessario l'uso del calcolatore per la grande complessità del problema.

Flessione e taglio
- tensione tangenziale:
  - premessa: la tensione tangenziale presso l'asse neutro vale $\tau_{cn} = \frac{T \cdot S_{ni}^*}{J_{ni} \cdot b} = \frac{T}{y\, b} \simeq \frac{T}{0{,}9\, b\, d}$
  - si può ottenere tale tensione calcolando la posizione dell'asse neutro e quindi S_{ni} e J_{ni} oppure, con ottima approssimazione, usando b e d (e senza dover trovare l'asse neutro).
- tensioni tangenziali ammissibili:
  $\overline{\tau}_{co} = 0{,}4 + \frac{R_{ck} - 15}{75}$ $\overline{\tau}_{c1} = 1{,}4 + \frac{R_{ck} - 15}{35}$

Se:
  - $\tau_{cn} < \overline{\tau}_{co}$ non servono specifiche armature a taglio;
  - $\overline{\tau}_{co} < \tau_{cn} < \overline{\tau}_{c1}$ bisogna disporre specifiche armature a taglio;
  - $\overline{\tau}_{c1} < \tau_{cn}$ la sezione non può sopportare lo sforzo di taglio neppure con armature specifiche.
- sforzo di scorrimento:
  $$dS = \frac{T}{y}\, dz \Rightarrow S = \int_{\Omega} \frac{T(z)}{y(z)}\, dz$$
- una volta confrontata la tensione tangenziale con le tensioni ammissibili, nel caso in cui $\overline{\tau}_{co} \leq \tau_{cn} \leq \overline{\tau}_{c1}$, si deve disporre l'apposita armatura a taglio. Si traccia quindi il diagramma di T e si passa a quello di T/y (lungo la trave). Nei tratti in cui $\overline{\tau}_{co} \leq \tau_{cn} \leq \overline{\tau}_{c1}$ si divide (arbitrariamente) l'area sottesa del dia-

gramma;

- per ogni area si calcola lo sforzo di scorrimento e si decide se sarà assorbito da barre piegate o da staffe:

$$V_t = \frac{S}{\cos\beta + \sin\beta} \Rightarrow \text{per barre piegate: } V_t = \frac{S}{\sqrt{2}}, \text{ per staffe: } V_t = S$$

- si calcola infine la tensione agente nel ferro:

$$\sigma = \frac{V_t}{A_t} \Rightarrow \text{per barre piegate: } \sigma = \frac{S}{\sqrt{2}\,A_t}, \text{ per staffe: } \sigma = \frac{S}{A_t}$$

- se invece è nota una certa tensione nelle staffe σ_{st} si può calcolare il numero di staffe necessarie e il passo tra le staffe:

$$n_{st} = \frac{S}{A_{st} \cdot \sigma_{st}} \qquad \Delta_{st} = \frac{\ell}{n_{st}}$$

con ℓ lunghezza della zona che necessita di staffe.

- tensione di aderenza:
  - si calcola la tensione tangenziale τ applicata lungo il perimetro complessivo p delle barre di armatura:

$$\tau = \frac{1}{p} \cdot \frac{dF_s}{dz} = \frac{T}{p \cdot y}$$

  - si esegue la verifica alle tensioni ammissibili con $\overline{\tau}_b = 1{,}5\,\overline{\tau}_{c0}$ per barre lisce e $\overline{\tau}_b = 3\,\overline{\tau}_{c0}$ per barre ad aderenza migliorata.